MECÁNICA ESTADÍSTICA
Fundamentos de Mecánica Estadística.

Problema 1. Escríbase la función de partición canónica de un sistema formado por dos partículas cada una de las cuales presenta un espectro de tres niveles de energías 0, ε y 2ε, en el caso de que sean:

a) Partículas clásicas localizadas

b) Partículas clásicas no localizadas

c) Bosones

d) Fermiones

Solución:
Función de partición canónica de un sistema de partículas.

a) Partículas clásicas localizadas (discernibles):
En este caso, la función de partición canónica del sistema es:

$$Z_N = z_1^2 = (1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon})^2.$$

b) Partículas clásicas no localizadas (no discernibles):
En este caso, la función de partición canónica del sistema debe incluir un factor que descuente el número de microestados que difieren entre si únicamente en permutaciones de partículas:

$$Z_N = \frac{z_1^2}{2!} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon})^2.$$

c) Bosones:
Los microestados del sistema son los que se muestran en la Fig. 1.a

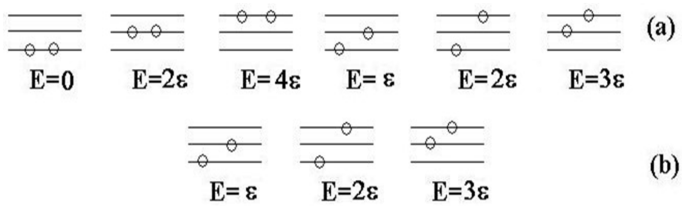

Figura 1: Microestados de un sistema de (a) bosones y (b) fermiones.

La función de partición canónica es:

$$Z_N = 1 + e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}.$$

d) Fermiones:
Para fermiones, los únicos estados admisibles (que respetan el principio de exclusión de Pauli) son los de la Fig. 1.b. Así pues,

$$Z_N = e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}.$$

Problema 2. Obténganse las fluctuaciones del número medio de partículas por estado cuántico para un sistema ideal de partículas idénticas, y demuéstrese que

$$s_{n_i}^2 = \overline{(n_i - \bar{n}_i)^2} = \bar{n}_i \left(1 \mp \bar{n}_i\right)$$

donde el signo superior (inferior) corresponde al caso de un gas de fermiones (bosones). ¿Qué sucede en el límite clásico?

Solución:
Varianza del número de partículas por estado en un gas ideal cuántico.

La varianza del número de partículas se obtiene a partir de la gran-función de partición de la forma:

$$s_N^2 = (k_B T)^2 \left(\frac{\partial^2 \ln \Xi}{\partial \mu^2}\right)_\beta = k_B T \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu}\right)_\beta .$$

Dado que los números de ocupación de los diferentes niveles de energía son independientes entre sí en la colectividad gran-canónica, $\ln \Xi = \sum_r \ln \xi_r$ por lo que podemos escribir la varianza del número total de partículas como:

$$s_N^2 = k_B T \sum_r \left(\frac{\partial \bar{n}_r}{\partial \mu}\right)_\beta = \sum_r s_{n_r}^2 .$$

Usando las expresiones del número medio de partículas por estado cuántico de bosones y fermiones:

$$\bar{n}_r = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} \pm 1} \quad (+,\ \text{FD};\ -\ \text{BE})$$

se puede escribir:

$$\begin{aligned} s_N^2 &= k_B T \sum_r \left(\frac{\partial \bar{n}_r}{\partial \mu}\right)_\beta \\ &= \sum_r \frac{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)}}{\left[e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} \pm 1\right]^2}. \end{aligned}$$

Usando ahora que

$$e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} = \frac{1}{\bar{n}_r} \mp 1,$$

resulta de manera inmediata

$$s_N^2 = \sum_r \bar{n}_r^2 \left(\frac{1}{\bar{n}_r} \mp 1\right) = \sum_r \bar{n}_r \left(1 \mp \bar{n}_r\right),$$

por lo que finalmente se obtiene el resultado deseado: $s_{n_r}^2 = \bar{n}_r \left(1 \mp \bar{n}_r\right)$.

Problema 3. Demuéstrese que la entropía de un gas ideal cuántico está dada por:

$$S = -k_B \sum_i \left[\bar{n}_i \ln \bar{n}_i \pm \left(1 \mp \bar{n}_i\right) \ln\left(1 \mp \bar{n}_i\right)\right],$$

donde el signo superior (inferior) corresponde al caso de fermiones (bosones).

Solución:
Entropía de un un gas ideal cuántico.

La entropía estadística en la colectividad gran-canónica es

$$S = -k_B \sum_l P_l \ln P_l = k_B \ln \Xi + \frac{1}{T}\bar{E} - \frac{\mu}{T}\bar{N},$$

que no es sino la definición del gran-potencial $\psi(T,V,\mu)$, como la transformada de Legendre de la energía interna del sistema $\bar{E}(S,V,\bar{N})$ respecto a la entropía y el número de partículas. Usando que:

$$\begin{aligned}
\ln \Xi &= \pm\sum_r \ln\left[1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_r-\mu)}\right] \\
\bar{E} &= \sum_r \bar{n}_r\varepsilon_r = \sum_r \frac{\varepsilon_r}{e^{\beta(\varepsilon_r-\mu)}\pm 1} \\
\bar{N} &= \sum_r \bar{n}_r = \sum_r \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r-\mu)}\pm 1},
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta nuevamente que

$$e^{\beta(\varepsilon_r-\mu)} = \frac{1}{\bar{n}_r} \mp 1 \Leftrightarrow \beta\left(\varepsilon_r-\mu\right) = \ln\left(1\mp\bar{n}_r\right) - \ln\bar{n}_r,$$

podemos reexpresar la entropía estadística como

$$S = \pm k_B \sum_r \ln\left[1 \pm \frac{\bar{n}_r}{1\mp\bar{n}_r}\right] + k_B\sum_r \bar{n}_r\left[\ln\left(1\mp\bar{n}_r\right) - \ln\bar{n}_r\right].$$

Reordenando la expresión anterior tenemos finalmente

$$\begin{aligned}
S &= \pm k_B \sum_r \ln\left[\frac{1\mp\bar{n}_r\pm\bar{n}_r}{1\mp\bar{n}_r}\right] + k_B\sum_r \bar{n}_r\ln\left(1\mp\bar{n}_r\right) - k_B\sum_r \bar{n}_r\ln\bar{n}_r \\
&= -k_B\sum_r\left[\bar{n}_r\ln\bar{n}_r \pm \left(1\mp\bar{n}_r\right)\ln\left(1\mp\bar{n}_r\right)\right].
\end{aligned}$$

Problema 4. Dada la densidad numérica n y la energía de Fermi de un gas ideal de electrones a $T = 0$ K, E_F, demuéstrese que su compresibilidad isoterma a esta temperatura es:

$$\kappa_T = \frac{3}{2nE_F}$$

Pista: Utilícese la ecuación de estado de los gases ideal cuánticos no relativistas $\bar{p}V = 2\bar{E}/3$. Puede ser útil utilizar que la energía libre de Helmholtz $F = \bar{E} - TS$ coincide con la energía interna del sistema, $\bar{E}$, a $T = 0$.

Solución:

Compresibilidad isoterma de un sistema de fermiones a T=0 K

La definición de compresibilidad isoterma del sistema es

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Teniendo en cuenta que la ecuación de estado térmica de un gas ideal no relativista es:

$$pV = \frac{2}{3}\bar{E}$$

y que la energía interna de un gas ideal de fermiones a T=0 K es

$$\bar{E} = \frac{3}{5}\bar{N}\varepsilon_F,$$

donde la energía de Fermi es

$$\varepsilon_F \ = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{3\bar{N}}{\pi V}\right)^{2/3},$$

podemos escribir

$$V = \frac{2}{5}\frac{\bar{N}}{p}\varepsilon_F,$$

o lo que es lo mismo

$$V^{5/3} = \frac{2}{5}\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{\bar{N}^{5/3}}{p}.$$

Derivando ambos miembros respecto a p se obtiene de manera directa

$$\frac{5}{3}V^{2/3}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{2}{5}\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{\bar{N}^{5/3}}{p^2},$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{5}{3}V\kappa_T = \frac{2}{5}\varepsilon_F\frac{\bar{N}}{p^2}.$$

Usando que para el gas de fermiones en el cero absoluto:

$$p = \frac{2}{5}\frac{\bar{N}}{V}\varepsilon_F = \frac{2}{5}n\varepsilon_F$$

y sustituyendo en la ecuación de la compresibilidad obtenemos finalmente:

$$\kappa_T = \frac{3}{2n\varepsilon_F}.$$

Problema 5. Consideremos un gas ideal cuántico tridimensional formado por N electrones ultrarrelativistas en un recinto de volumen V de dimensiones macroscópicas.

a) Calcúlese la densidad de estados del sistema y represéntese el resultado.

b) Obténgase la expresión de la energía de Fermi del sistema.

c) Obténgase la energía interna del gas a temperatura nula como función del número medio de partículas.

d) Analícese la dependencia en la densidad de partículas de la presión del gas a $T = 0$. ¿Es una dependencia más fuerte o más débil que en el gas no-relativista?

e) Consideremos que el gas anterior representa los electrones en el interior de una enana blanca compuesta de partículas α_2^4 (núcleos de He_2^4 completamente ionizados) y electrones. Exprésese la energía cinética en términos de la masa total de la estrella M y de su radio R. Teniendo en cuenta que la autoenergía potencial gravitatoria de una estrella de radio R y densidad uniforme es $E_p = -\frac{3}{5}GM^2/R$, donde G es la constante gravitacional, ¿qué podemos decir de la estabilidad mecánica de la estrella en este modelo?

Solución:

Estabilidad estelar.

a) La densidad de estados del sistema de electrones ultrarrelativistas es:

$$N(k) = g_s\frac{4\pi k^3/3}{(2\pi/a)^3} = g_s\frac{V}{6\pi^2}k^3 \quad ; \quad g_s = 2S+1 = 2 \ \ \text{(electrones)}$$

Utilizando la relación de dispersión para electrones ultrarrelativistas ($m = 0$), $E = \hbar kc$, tenemos:

$$N(E) = g_s \frac{V}{6\pi^2\hbar^3 c^3} E^3.$$

Consecuentemente, la densidad de estados del sistema de electrones ultrarrelativista es

$$g(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{V}{\pi^2\hbar^3 c^3} E^2.$$

b) La energía de Fermi del sistema se calcula teniendo en cuenta que a $T = 0$ K todos los estados de energía inferior a la de Fermi están ocupados por un electrón y que todos los superiores están desocupados

$$\bar{n}(E) = \begin{cases} 1 & E \leq \varepsilon_F \\ 0 & E > \varepsilon_F \end{cases} .$$

Luego:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{\substack{r \\ (\varepsilon_r < \varepsilon_F)}} \bar{n}_r = \int_0^\infty g(E)\bar{n}(E)dE = \int_0^{\varepsilon_F} g(E)dE \\ &= \frac{V}{\pi^2\hbar^3 c^3} \int_0^{\varepsilon_F} E^2 dE = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3 c^3} \varepsilon_F^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía de Fermi del gas de electrones ultrarrelativista es:

$$\varepsilon_F = \hbar c \left(\frac{3\pi^2 \bar{N}}{V} \right)^{1/3}.$$

c) Energía interna del gas: La energía interna a $T = 0$ K

$$\begin{aligned} \bar{E}_0 &= \int_0^\infty g(E)\bar{n}(E)EdE = \int_0^{\varepsilon_F} g(E)EdE \\ &= \frac{V}{\pi^2\hbar^3 c^3} \int_0^{\varepsilon_F} E^3 dE \\ &= \frac{V}{4\pi^2\hbar^3 c^3} \varepsilon_F^4 = \frac{3}{4}\bar{N}\varepsilon_F. \end{aligned}$$

d) Presión del gas: Teniendo en cuenta que a $T = 0$ K todos los procesos isotérmicos son también adiabáticos (o que $F = E - TS = E$ a esta temperatura),

$$\begin{aligned} p &= -\left(\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial V} \right)_{S,\bar{N}} = -\frac{3}{4}\bar{N} \left(\frac{\partial \varepsilon_F}{\partial V} \right)_{S,\bar{N}} \\ &= \frac{1}{4}\frac{\bar{N}}{V}\varepsilon_F \sim \left(\frac{\bar{N}}{V} \right)^{4/3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la dependencia de la presión estadística del gas de electrones ultrarrelativista es más suave que la dependencia de su homólogo no relativista, $\left(\frac{\bar{N}}{V}\right)^{5/3}$.

e) Estabilidad de la enana blanca.

De acuerdo con el modelo vigente de evolución estelar, las estrellas pueden acabar evolucionando o no hacia un agujero negro a medida que se agota su combustible nuclear dependiendo de que su masa esté por encima o por debajo de un cierto límite, denominado límite de Chandrasekhar. En el caso de que esté por encima de ese límite, la interacción gravitatoria acabará comprimiendo buena parte de la masa de la estrella en una región muy pequeña del espacio, de radio inferior al denominado horizonte de sucesos. Si la masa es inferior puede estabilizarse en un objeto estelar, por ejemplo una enana blanca o una estrella de neutrones, en el que el efecto de la interación gravitatoria está compensado por alguna contribución repulsiva entre los constituyentes. En el caso de una enana blanca formada por núcleos de helio totalmente ionizados (partículas alfa, $^2_4\alpha$) y electrones libres es la energía cinética de los componentes de la estrella la que compensa el efecto de la fuerza gravitatoria.

Un análisis simple de la estabilidad de la estrella puede realizarse analizando el comportamiento de la energía mecánica del cuerpo. Este será estable si la energía cinética de los constituyentes es superior a la autoenergía potencial gravitatoria. Vamos a realizar un análisis cuantitativo de la contribución tanto del gas formado por los núcleos de helio ionizados como la del gas formado por los electrones (los cuales serán considerados ultrarrelativistas debido a las altas temperaturas que se alcanzan en estos cuerpos $\sim 10^7 K$) a la presión que evita que la estrella colapse. Si se supone una densidad numérica de partículas alfa para una enana blanca de entorno a $n_\alpha = N_\alpha/V \sim 1{,}25 \cdot 10^{35} m^{-3}$ (densidad media de Sirius B) entonces se puede estimar la temperatura de Bose (ec. 5.27 de las notas) para el gas de bosones que constituyen las partículas α en el interior de la estrella:

$$T_B = \frac{2\pi\hbar^2}{m_\alpha k_B} \left(\frac{\bar{n}_\alpha}{2{,}616 g_s} \right)^{2/3} \simeq 10^5 K$$

Hemos usado que $g_s = 1$ para partículas α (espín 0). Por otro lado, la temperatura de Fermi para el gas de electrones ultrarrelativistas de la enana blanca será:

$$T_F = \frac{\hbar c}{k_B} \left(3\pi^2 \bar{n}_e\right)^{2/3} \simeq 3{,}5 \cdot 10^9 K$$

Se ha tenido en cuenta que $\bar{n}_e = 2\bar{n}_\alpha$ ya que cada núcleo de helio aporta dos electrones. Dicho esto vemos que, dado que la temperatura media de las enanas blancas ronda los $10^7 K$, podemos que describir a las partículas α como un gas de bosones a altas temperaturas (límite clásico) mientras que los electrones estarán caracterizados por la descripción estadística de un gas de fermiones a bajas temperaturas ($T = 0K$). Por tanto, la presión ejercida por las partículas α será (gas ideal clásico):

$$p_\alpha = n_\alpha k_B T$$

Y por los electrones (apartado d):

$$p_e = \frac{1}{4} n_e k_B T_F = \frac{1}{2} n_\alpha k_B T_F$$

Si calculamos la relación entre ambas:

$$\frac{p_e}{p_\alpha} = \frac{T_F}{2T} \Longrightarrow p_e \simeq 175 p_\alpha$$

Como vemos, la presión ejercida por el gas de electrones es unas 175 veces mayor que la ejercida por las partículas α lo que nos permite, en primera aproximación, hacer el balance de energías teniendo únicamente en cuenta la contribución de los electrones. Consecuentemente, la energía cinética de la estrella es aproximadamente la de un gas de electrones ultrarrelativistas a $T = 0$ K que hemos obtenido en el apartado c):

$$E_c = \frac{3}{4} \bar{N}_e \varepsilon_F = \frac{3}{4} \bar{N}_e \hbar c \left(\frac{3\pi^2 \bar{N}_e}{V} \right)^{1/3}.$$

El número de electrones dobla al de nucleos de helio, por lo que

$$M \simeq N_\alpha m_\alpha = \frac{1}{2} N_e m_\alpha.$$

Por otro lado, $V = 4\pi R^3/3$, de tal manera que:

$$E_c = \frac{3}{2} \left(\frac{9\pi}{2} \right)^{1/3} \hbar c \left(\frac{M}{m_\alpha} \right)^{4/3} \frac{1}{R}.$$

Teniendo en cuenta que la energía potencial gravitatoria de la estrella autogravitante de masa M, radio R y densidad uniforme es

$$E_p = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

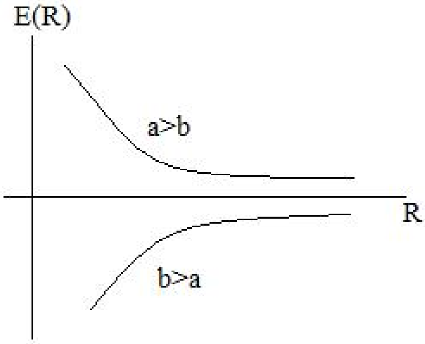

Figura 2: Comportamiento de la energía mecánica de la enana blanca.

obtenemos una energía mecánica de la forma:

$$E = E_c + E_p = \frac{(a-b)}{R},$$

que no presenta ningún punto de estabilidad ni para $a > b$ ni para $b > a$. Una idea de una masa crítica de estabilidad que podríamos obtener con un modelo más sofisticado de la estrella corresponde al caso $a = b$ en el cual, despreciando constantes:

$$\begin{aligned} \hbar c \left(\frac{M}{m_\alpha}\right)^{4/3} &\sim GM^2 \\ M &\sim \left(\frac{c\hbar}{Gm_\alpha^2}\right)^{3/2} m_\alpha. \end{aligned}$$

Esta sería la masa crítica para que la presión del gas de electrones (presión de Fermi) compensase la presión gravitatoria y evitase el colapso de la estrella en un agujero negro tras el agotamiento de su combustible. Este valor ha de compararse con la denominada masa de Chandrasekhar para la masa límite de una enana blanca compuesta por partículas de masa m_p, número atómico Z y número másico A,

$$M_{ch} = 0{,}20\left(\frac{Z}{A}\right)\left(\frac{\hbar c}{Gm_p^2}\right)^{3/2} m_p,$$

que para el caso de partículas alfa conduce a $M_{ch} = 1{,}4 M_{\rm sol}$. A partir de esta masa la enana blanca no sería estable y evolucionaría, o bien hacia una estrella de neutrones o bien hacia un agujero negro.

Problema 6. Para un gas de electrones a temperatura finita calcúlese la dependencia con la temperatura de su:

a) Potencial químico

b) Energía interna

c) Presión

d) Capacidad calorífica.

Solución:

Gas de electrones a temperatura finita.

a) Potencial químico: El potencial químico de un sistema fermiónico viene definido por:

$$\bar{N} = \sum_r \bar{n}_r = \int_0^\infty g(\epsilon)\bar{n}(\epsilon)d\epsilon = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}d\epsilon \tag{1}$$

Para resolver esta integral vamos a resolver un caso más general para así poder utilizar su solución en siguientes apartados. Trataremos de resolver una integral de la forma:

$$I(\beta) = \int_0^\infty \frac{\chi'(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}d\epsilon.$$

Para este apartado, $\chi'(\epsilon)$ será la densidad de estados o, como ya sabemos, $\chi(\epsilon)$ será el volumen fásico, $\Gamma'(\epsilon) = g(\epsilon)$. También sabemos que el volumen fásico de un gas ideal de electrones cuando $\epsilon = 0$ es nulo ($\Gamma(0) = 0$, no hay microestados accesibles al sistema). Teniendo esto en cuenta podemos integrar por partes para obtener:

$$I(\beta) = \beta \int_0^\infty \frac{\chi(\epsilon)\, e^{\beta(\epsilon-\mu)}}{\left[e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1\right]^2}d\epsilon.$$

Vamos ahora a desarrollar en serie de Taylor la función $\chi(\epsilon)$ en torno a $\epsilon = \mu$:

$$I(\beta) \quad = \quad \beta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi^{(m)}(\mu)}{m!} \int_0^\infty \frac{(\epsilon-\mu)^m e^{\beta(\epsilon-\mu)}}{\left[e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1\right]^2}d\epsilon$$

Haciendo ahora un cambio de variable en las integrales tal que $x = \beta(\epsilon - \mu)$, podemos escribir esta expresión como:

$$I(\beta) \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi^{(m)}(\mu)}{m!}\beta^{-m} \int_{-\mu\beta}^\infty \frac{x^m e^x}{(e^x+1)^2}dx$$

Si se representa el integrando para distintos valores de m (ver Fig. 3) se puede ver este decae rápidamente a cero a medida que crece o decrece x. Por otro lado, si tenemos en cuenta que lo que queremos es estudiar la dependencia de las magnitudes termodinámicas cuando nos alejamos de $T = 0$ podemos pensar que estamos en el régimen $T << T_F$. En esta situación tendremos que $\beta\mu >> 0$ ya que recordemos que el potencial químico es del orden de la energía de Fermi ($\epsilon_F = k_B T_F$). Con todo esto podemos extender el límite inferior de las integrales dentro de la serie a $-\infty$ sin cometer errores significativos. Además, teniendo en cuenta que:

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$$

podemos escribir:

$$I(\beta) \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi^{(m)}(\mu)}{m!}\beta^{-m} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^m}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}dx.$$

Ahora, por paridad (notar que $f(x) = f(-x)$), cada una de las integrales será nula cuando m sea impar mientras que si m es par, la función es simétrica y el problema se reduce a calcular la integral para valores positivos de x:

$$I_m = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^m}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}dx = 2\int_0^\infty \frac{x^m e^x}{(e^x+1)^2}dx$$

Hemos vuelto a la forma original de $f(x)$ para poder integrar por partes y obtener:

$$I_m = 2\left(-\frac{x^m}{e^x+1}\bigg|_0^\infty + m\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^x+1}dx\right) = 2m\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^x+1}dx$$

Para calcular esta integral podemos usar la función η de Dirichlet que nos da la relación de esta integral con la función Γ de euler y ζ de Riemann:

$$\eta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^x+1}dx.$$

Por tanto:

$$I_m = 2m\Gamma(m)(1-2^{1-m})\zeta(m) = 2m(m-1)!(1-2^{1-m})\zeta(m) = 2m!(1-2^{1-m})\zeta(m)$$

Recordar que esto solo se cumple para valores pares de m y distintos de cero. Como ya hemos dicho, si m impar, $I_m = 0$ y si $m = 0$:

$$I_0 = 2\int_0^\infty \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx = -\frac{1}{e^x+1}\bigg|_0^\infty = 1$$

Juntando todo tendremos:

$$I(T) = \chi(\mu) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \chi^{(2m)}(\mu)\,(k_BT)^{2m}(1-2^{1-2m})\zeta(2m)$$

Este desarrollo de la integral se conoce como desarrollo de Sommerfeld.

Si volvemos al cálculo del número medio de partículas y nos quedamos a primer orden en la temperatura en este desarrollo tenemos:

$$\bar{N} \simeq \int_0^\mu g(\epsilon)d\epsilon + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2 g'(\mu)$$

Teniendo en cuenta que el factor de degeneración de espín de los electrones es $g_s = 2$ y usando que la densidad de estados para electrones no relativistas es:

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= g_s\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\epsilon^{1/2} \\ &= \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\epsilon^{1/2}, \end{aligned}$$

tendremos:

$$\bar{N} \simeq \frac{8\pi V}{3h^3}(2m)^{3/2}\mu^{3/2}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_BT}{\mu}\right)^2\right].$$

De forma más compacta, usando la expresión de la energía de Fermi para un gas ideal de electrones no relativistas:

$$\epsilon_F^{3/2} = \mu^{3/2}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_BT}{\mu}\right)^2\right].$$

Para poder despejar μ de esta ecuación debemos expandir en serie de Taylor la parte derecha de la igualdad con μ en torno a ϵ_F. Tras hacer esto y quedarnos a orden lineal en μ en el desarrollo se puede llegar a que:

$$\epsilon_F \simeq \mu\left[t^{2/3} - \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^2 t^{-1/3}\right] + \epsilon_F\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^2 t^{-1/3}$$

con:

$$t = 1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^2.$$

Despejando μ y volviendo a expandir en $\frac{k_BT}{\epsilon_F}$ para quedarnos a primer orden:

$$\mu \simeq \epsilon_F\frac{\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^2\right]^{1/3} - \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^2}{1-\frac{\pi^2}{24}\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^2} \simeq \epsilon_F\left[1-\frac{3\pi^2}{24}\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^2\right]\left[1+\frac{\pi^2}{24}\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^2\right]$$

Finalmente:

$$\mu = \varepsilon_F\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\varepsilon_F}\right)^2\right].$$

Como vemos, la corrección de menor orden al resultado a T =0 K es cuadrática en la temperatura.

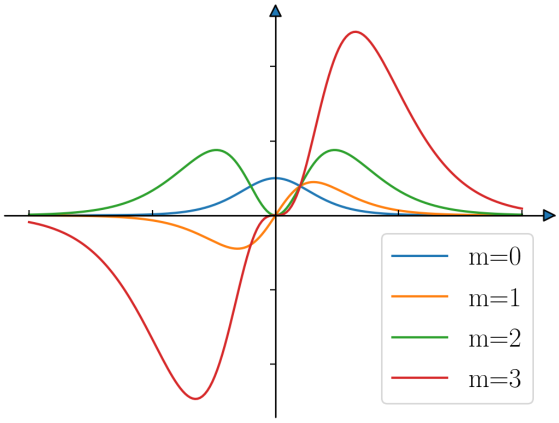

Figura 3: Representación del integrando para los primeros valores de m.

b) Energía interna: Usando la misma expansión que en el apartado anterior con $\chi'(\epsilon) = g(\epsilon)\epsilon$, podemos escribir la energía interna del gas de electrones a baja temperatura como:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \sum_r \bar{n}_r \varepsilon_r = \int_0^\infty g(\epsilon)\bar{n}(\epsilon)\epsilon d\epsilon \\ &= \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} d\epsilon \\ &= \int_0^\mu \epsilon g(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 [g(\epsilon)\epsilon]'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360}(k_B T)^4 [g(\epsilon)\epsilon]'''(\mu) + ...\end{aligned}$$

Sustituyendo nuevamente que la densidad de estados para electrones no relativistas obtenemos de manera directa:

$$\bar{E} = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\mu \epsilon^{3/2} d\epsilon + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\frac{3}{2}\mu^{1/2} + ...$$

Sustituyendo la expresión obtenida anteriormente para el potencial químico en la ecuación anterior y desarrollando obtenemos:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\frac{2}{5}\varepsilon_F^{5/2}\left\{\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2\right]^{5/2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \frac{3}{2}\varepsilon_F^{1/2}\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2\right]^{1/2} + ...\right\}.\end{aligned}$$

Desarrollando en serie las raíces en la expresión anterior al orden más bajo en $k_B T/\varepsilon_F$, la energía interna del gas de electrones puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{3}{5}\bar{N}\varepsilon_F\left\{1-\frac{5}{2}\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2 + \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2\frac{15}{4} + O\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^4\right\} \\ &\simeq \frac{3}{5}\bar{N}\varepsilon_F\left[1+\frac{5}{12}\pi^2\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2\right]\end{aligned}$$

Nuevamente obtenemos una corrección cuadrática al resultado a T=0 K que en términos de la temperatura de Fermi $\varepsilon_F = k_B T_F$ puede expresarse como:

$$\bar{E} \simeq \frac{3}{5}\bar{N}k_B T_F\left[1+\frac{5}{12}\pi^2\left(\frac{T}{T_F}\right)^2\right]$$

c) Presión: La presión del gas se obtiene trivialmente a partir de la expresión de la energía usando la relación

$$pV = \frac{2}{3}\bar{E}$$

válida para gases ideales no relativistas.

d) Capacidad calorífica: Finalmente, la capacidad calorífica del gas de electrones se obtiene usando las relaciones termodinámicas convencionales:

$$\begin{aligned} C_V &= \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_V \simeq \frac{3}{5}\bar{N}k_B T_F \frac{5}{6}\pi^2 \frac{T}{T_F^2} \\ &= \frac{\pi^2}{2}\bar{N}k_B \frac{T}{T_F} \end{aligned}$$

Problema 7. Considérese un gas ideal de bosones no relativista. Analícese si tiene lugar el fenómeno de la condensación de Bose-Einstein en una y en dos dimensiones.

Solución:

Condensación de Bose-Einstein (BE) en una y dos dimensiones.

En un sistema bosónico, la condensación de BE tendrá lugar siempre que exista un número máximo de bosones en estados excitados. En este caso, el resto de bosones añadidos por encima de dicho número límite irá al estado fundamental, dando lugar a una ocupación macroscópica de este estado en el límite termodinámico. El número de bosones en estados excitados es:

$$\bar{N}_{exc} = \int_0^\infty g(\epsilon)\bar{n}(\epsilon)d\epsilon = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}d\epsilon.$$

Como el potencial químico de un sistema bosónico no puede ser positivo si el origen de energías es cero, el máximo de la integral anterior se alcanza para el valor $\mu = 0$, lo que define la temperatura de Bose del sistema. En este caso, el número de bosones en estados excitados es:

$$\bar{N}_{exc} = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1}d\epsilon. \tag{2}$$

Para un sistema unidimensional, la densidad de estados de bosones no relativistas en una caja de longitud a es:

$$g(\epsilon) = g_s \frac{a}{h}(2m)^{1/2}\epsilon^{-1/2}.$$

Así pues, para un sistema unidimensional no relativista, el número de bosones en estados excitados es

$$\bar{N}_{exc} = g_s \frac{a}{h}(2m)^{1/2}\int_0^\infty \frac{\epsilon^{-1/2}}{e^{\beta\epsilon} - 1}d\epsilon, \tag{3}$$

integral que diverge. Luego, no está acotado el número de bosones en estados excitados en un sistema unidimensional y por tanto no existe condensación de BE.

Lo mismo puede decirse para un sistema bidimensional, en el que la densidad de estados es

$$g(\epsilon) = g_s \frac{2m\pi a^2}{h^2},$$

por lo que el número de bosones en estados excitados es

$$\bar{N}_{exc} = g_s \frac{2m\pi a^2}{h^2}\int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1}d\epsilon \to \infty.$$

Problema 8. En el laboratorio la condensación de Bose-Einstein de un sistema diluido de átomos de masa m se consigue confinándolos en una trampa magnética que da lugar a un potencial armónico para cada partícula de la forma:

$$H = \frac{\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)}{2m} + \frac{m}{2}\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right)$$

donde ω_x, ω_y, ω_z representan las frecuencias de la trampa en las diferentes direcciones del espacio.

a) Si el sistema tiene una energía muy superior a la de los intervalos entre diferentes estados de energía (lo que sucede trivialmente para sistemas de dimensiones macroscópicas), podemos considerar que el espectro de estados de energía forma un continuo con una densidad de estados $g(\varepsilon)$. Encuéntrese una expresión para la densidad de estados del sistema del ejercicio, tanto en el límite clásico como de manera estrictamente cuántica.

b) Suponiendo que tenemos un total de N átomos en la trampa magnética, calcúlese una expresión para la fugacidad de los bosones, y utilícese el resultado anterior para calcular la temperatura de Bose (T_B) del sistema. Interprétese físicamente el resultado.

c) Calcúlese la fracción de bosones en el condensado a $T < T_B$ y la energía interna del sistema a $T = T_B$.

d) Obténgase la temperatura de condensación en un experimento en el cual se usan $N = 10^7$ átomos de Rb_{37}^{87} confinados en trampa de frecuencias $\frac{1}{2\pi}\left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right) = (250, 670, 7)$ Hertz.

Solución:

Condensación de Bose-Einstein (BE) en un potencial armónico.

a) Densidad de estados: En la aproximación cuasiclásica (límite clásico) el volumen fásico de una partícula cuyo hamiltoniano es

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right),$$

podemos escribirlo de la forma (ignoramos spin):

$$\Gamma(\epsilon) = \int\limits_{H \le \epsilon} \frac{d\vec{r}d\vec{p}}{h^3}.$$

Realizando el cambio de variables:

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{p_i}{\sqrt{2m}} \qquad i = 1,2,3 \\ \xi_i &= \sqrt{\frac{m}{2}}\omega_i r_i \quad i = 4,5,6 \end{aligned}$$

resulta que

$$\Gamma(E) = \frac{8}{\left(h\bar{\omega}\right)^3} \int\limits_{|\vec{\xi}| \le \epsilon} d\vec{\xi},$$

donde $\bar{\omega} = \left(\omega_x \omega_y \omega_z\right)^{1/3}$. Usando que el volumen de una esfera de radio $\sqrt{E}$ en un espacio de seis dimensiones es

$$V_6(\sqrt{\epsilon}) = \frac{\pi^3}{6}\epsilon^3$$

obtenemos, finalmente,

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{6}\left(\frac{\epsilon}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \Leftrightarrow g\left(\epsilon\right) = \frac{1}{2}\frac{\epsilon^2}{\left(\hbar\bar{\omega}\right)^3}.$$

En el caso cuántico, el volumen fásico vienen dado por el número de elecciones de los números cuánticos n_i en las que el hamiltoniano

$$\sum_i \hbar\omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right) < \epsilon.$$

Ignorando los factores constantes $1/2$, estamos ante un problema de cálculo del volumen de un tetraedro de ejes $\epsilon/\left(\hbar\omega_x\right), \epsilon/\left(\hbar\omega_y\right), \epsilon/\left(\hbar\omega_z\right)$ (ver Fig. 4):

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{6}\left(\frac{\epsilon}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3.$$

recuperando el resultado anterior.

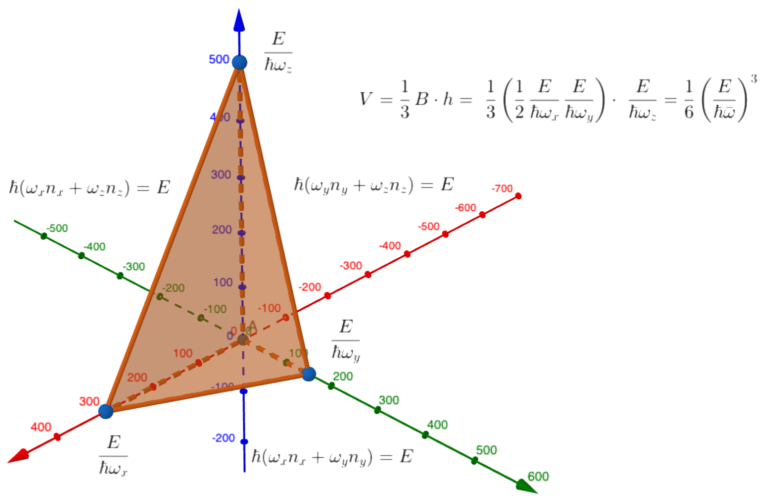

Figura 4: Representación de la pirámide que contiene todos los microestados accesibles a una partícula atrapada en una trampa armónica.

b) Fugacidad del sistema de bosones y temperatura de Bose: La fugacidad ($e^{\beta\mu}$) del sistema está definida de manera implícita por la expresión:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_r \bar{n}_r = \int_0^\infty g(\epsilon)\bar{n}(\epsilon)dE = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}d\epsilon \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(\hbar\bar{\omega})^3}\int_0^\infty \frac{\epsilon^2}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}d\epsilon \end{aligned}$$

Como sabemos, la condensación de Bose-Einstein es el fenómeno de acumulación de bosones en el estado fundamental del sistema cuando se ha alcanzado la saturación de los estados excitados. Como hemos visto en el ejercicio anterior, el máximo del número de bosones en estados excitados se alcanza para $\mu = 0$ y en un sistema tridimensional toma el valor:

$$\bar{N}_{exc} = \frac{1}{2}\frac{1}{(\hbar\bar{\omega})^3}\int_0^\infty \frac{\epsilon^2}{e^{\beta\epsilon}-1}d\epsilon$$

Usando que[1]:

$$\frac{1}{e^{\beta\epsilon}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\beta\epsilon}$$

y sustituyendo en la expresión del número de bosones en estados excitados e integrando tenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{N}_{exc} &= \frac{1}{2}\frac{1}{(\hbar\bar{\omega})^3}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\epsilon^2 e^{-n\beta\epsilon}d\epsilon \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(\hbar\bar{\omega})^3}\frac{1}{\beta^3}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}x^2 e^{-nx}dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{k_BT}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(3)}{n^3} \\
&= \zeta(3)\left(\frac{k_BT}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3,
\end{aligned}$$

donde $\zeta(k)$ representa la función zeta de Riemann. Si el número de bosones se incrementa por encima de la cota anterior, se produce el fenómeno de condensación de BE, ya que los estados excitados se encuentran completamente llenos. Para N fijo (al comienzo de la condensación, el número de bosones en estado fundamental es nulo, por lo que el número total de bosones del sistema coincide con el de bosones en estados excitados, $N = N_{exc}$), la temperatura a la que se produce la saturación de estos estados se denomina temperatura de Bose, y marca el comienzo de la ocupación del estado fundamental. En este caso, despejando de la ecuación anterior:

$$T_B=\frac{\hbar\bar{\omega}}{k_B}\left[\frac{N}{\zeta(3)}\right]^{1/3}.$$

c) Fracción de bosones en el condensado y energía interna del sistema a $T < T_B$: Evidentemente, el número total de bosones del sistema verifica:

$$N = N_0 + N_{exc},$$

donde N_0 es el número de bosones en el estado fundamental. Como hemos visto, cuando $T < T_B$ el potencial químico sigue siendo nulo (toma su valor máximo) por lo que la expresión para el número medio de bosones en los estados excitados obtenida en el apartado anterior sigue siendo válida en este régimen:

$$N_{exc}=\zeta(3)\left(\frac{k_BT}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
N_0 &= N-\zeta(3)\left(\frac{k_BT}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{N_0}{N}=1-\frac{\zeta(3)}{N}\left(\frac{k_BT}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \\
\frac{N_0}{N} &= 1-\left(\frac{T}{T_B}\right)^3.
\end{aligned}$$

[1] También puede ser útil en general para el cálculo de valores medios en gases ideales de bosones la siguiente relación entre la función ζ de Riemann y la funcón Γ de Euler:

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$$

Por otro lado, a $T = T_B$ ($\mu = 0$) la energía interna del sistema será:

$$\begin{aligned}
\bar{E} &= \sum_r \bar{n}_r \varepsilon_r = \int_0^\infty g(\epsilon)\bar{n}(\epsilon)\epsilon d\epsilon = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)\epsilon}{e^{\beta\epsilon}-1} d\epsilon \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(\hbar\bar{\omega})^3}\int_0^\infty \frac{\epsilon^3}{e^{\beta\epsilon}-1}d\epsilon \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(\hbar\bar{\omega})^3}\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty \epsilon^3 e^{-n\beta\epsilon}d\epsilon \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(\hbar\bar{\omega})^3}\frac{1}{\beta^4}\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty x^3 e^{-nx}dx \\
&= \frac{\hbar\bar{\omega}}{2}\left(\frac{k_B T_B}{\hbar\bar{\omega}}\right)^4 \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(4)}{n^4} \\
&= \frac{\pi^4}{30}\hbar\bar{\omega}\left(\frac{N}{\zeta(3)}\right)^{4/3}.
\end{aligned}$$

d) Para los datos del experimento propuesto tenemos $N = 10^7$ y $\bar{\omega} = 6,625{,}10^2$ Hz, por lo que

$$T_B = \frac{\hbar\bar{\omega}}{k_B}\left[\frac{N}{\zeta(3)}\right]^{1/3} \sim 10^{-6} \text{ K}.$$

Problema 9. Supóngase que el universo es una cavidad de radio 10^{26} m y paredes impenetrables. Suponiendo que la temperatura en el interior de la cavidad es de 3 K, estímese el número total de fotones en el universo y el contenido energético de estos.

Solución:

Gas de fotones en el Universo.

Teniendo en cuenta que la densidad de estados de fotón es

$$g(\epsilon) = 2 \times \frac{V}{2\pi\hbar^3 c^3}\epsilon^2 = \frac{V}{\pi^2\hbar^3 c^3}\epsilon^2$$

y que para fotones $\mu = 0$, el número medio de fotones en la cavidad (Universo) es:

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= \sum_r \bar{n}_r = \int_0^\infty g(\epsilon)\bar{n}(\epsilon)d\epsilon = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon}-1}d\epsilon \\
&= \frac{V}{\pi^2\hbar^3 c^3}\int_0^\infty \frac{\epsilon^2}{e^{\beta\epsilon}-1}d\epsilon \\
&= \frac{V}{\pi^2\hbar^3 c^3}\frac{1}{\beta^3}\Gamma(3)\zeta(3) \\
&= \frac{V}{\pi^2}\Gamma(3)\zeta(3)\left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3.
\end{aligned}$$

Usando que $\zeta(3) \simeq 2{,}4$, que la temperatura es $T = 3$ K y que el volumen de la cavidad es $V = 4\pi R^3/3$ ($R \sim 10^{26}$ m), se obtiene:

$$\bar{N} \sim 10^{88} \text{ fotones},$$

lo que conduce a una densidad fotónica aproximada de

$$n = \frac{\bar{N}}{V} \sim 10^9 \text{ fotones m}^{-3},$$

o lo que es lo mismo, 1000 fotones cm^{-3}.

Por lo que respecta a la energía de estos fotones, podemos usar las expresiones habituales para escribir

$$\begin{aligned}
\bar{E} &= \sum_r \bar{n}_r \varepsilon_r = \int_0^\infty g(\epsilon)\bar{n}(\epsilon)\epsilon d\epsilon = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)\epsilon}{e^{\beta\epsilon}-1}d\epsilon \\
&= \frac{V}{\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^\infty \frac{\epsilon^3}{e^{\beta\epsilon}-1}d\epsilon \\
&= \frac{V}{\pi^2\hbar^3c^3}\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \epsilon^3 e^{-n\beta\epsilon}d\epsilon \\
&= \frac{V}{\pi^2\hbar^3c^3}\frac{1}{\beta^4}\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^3 e^{-nx}dx \\
&= \frac{V}{\pi^2\hbar^3c^3}\frac{1}{\beta^4}\sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(4)}{n^4} \\
&= \frac{V}{\pi^2\hbar^3c^3}\frac{1}{\beta^4}\Gamma(4)\zeta(4).
\end{aligned}$$

Usando que $\Gamma(4) = 3!$ y que $\zeta(4) = \pi^4/90$, tenemos:

$$\frac{\bar{E}}{V} = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3c^3}T^4,$$

que es la bien conocida ley de Stefan-Boltzmann. Luego, en nuestro caso la densidad de energía asociada a la radiación de fondo es

$$\frac{\bar{E}}{V} \sim 6\times 10^{-14}\ \mathrm{J\ m^{-3}}.$$

Problema 10. A bajas temperaturas, la densidad de modos normales de las vibraciones cuantizadas de la magnetización (ondas de espín o magnones) en un cristal ferromagnético sigue una ley de la forma $g(\omega) = A\sqrt{\omega}$. Calcúlese la contribución de las ondas de espín a la capacidad calorífica del sistema.

Solución:

En el modelo de Debye, los N spines que componen el cristal realizan pequeñas oscilaciones armónicas

en torno a la posición de equilibrio. El conjunto de osciladores armónicos acoplados cuyo hamiltoniano es de la forma

$$\hat{H}\left(\bar{q}^N, \bar{p}^N\right) = \sum_{i=1}^{3N}\frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i,j}^{3N} A_{ij}q_iq_j$$

puede desacoplarse utilizando la transformación canónica a modos normales que nos conduce a un hamiltoniano

$$\hat{H}\left(Q^N, P^N\right) = \sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{P_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_i^2Q_i^2\right).$$

Los $3N$ modos normales del sistema actúan como estados de energía ocupados por cuasipartículas llamadas magnones que constituyen excitaciones de estos modos normales. Podemos ver entonces el problema de las oscilaciones de los spines del sólido ferromagnético como el de un gas ideal de magnones. Así pues, la función de partición canónica del sistema es

$$Z(T,V) = \prod_{i=1}^{3N}\sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\left(n_i+\frac{1}{2}\right)\omega_i} \Rightarrow \qquad \ln\, Z = -\sum_{i=1}^{3N}\left[\frac{\beta\hbar\omega_i}{2} + \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega_i}\right)\right],$$

que coincide -salvo un factor constante- con la de un gas ideal cuántico con $\varepsilon_i = \hbar\omega_i$ y potencial químico nulo. Esto se deduce de las condiciones termodinámicas de equilibrio y estabilidad, ya que los magnones están siendo constantemente emitidos y absorbidos por la red por lo que su número no es constante en un sistema cerrado a T, V constantes. Usando la relación de Gibbs-Helmholtz

$$\bar{E} = -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_{V,N} = \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\hbar\omega_i}{2} + \frac{\hbar\omega_i}{e^{\beta\hbar\omega_i} - 1}\right],$$

podemos escribir para la capacidad calorífica a volumen constante:

$$C_V = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_V = k_B \sum_{i=1}^{3N} \frac{(\beta\hbar\omega_i)^2\, e^{\beta\hbar\omega_i}}{(e^{\beta\hbar\omega_i} - 1)^2}.$$

Haciendo la aproximación continua habitual en sistemas macroscópicos y teniendo en cuenta que el número finito de modos normales implica la existencia de una frecuencia de corte para magnones en el espacio de frecuencias, ω_D, tenemos:

$$C_V = k_B \int_0^{\omega_D} g(\omega) \frac{(\beta\hbar\omega)^2\, e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} d\omega.$$

Usando la densidad de estados de magnón, $g(\omega) = A\sqrt{\omega}$ y haciendo el cambio de variable $x = \beta\hbar\omega$ tenemos

$$C_V = Ak_B\,(\beta\hbar)^{-3/2} \int_0^{x_D} \frac{x^{5/2} e^x}{(e^x - 1)^2} dx.$$

Teniendo en cuenta que cuando T$\rightarrow 0$, $x_D \rightarrow \infty$, podemos aproximar la integral anterior de la forma:

$$C_V = \frac{Ak_B^{5/2}}{\hbar^{3/2}} \left[\int_0^{\infty} \frac{x^{5/2} e^x}{(e^x - 1)^2} dx\right] T^{3/2}.$$

Luego, la contribución de los magnones a la capacidad calorífica a bajas temperaturas es $C_V \sim T^{3/2}$.